Zelluläre Automaten

Sommerakademie Ftan 2004

Daniel Abler

Zelluläre Automaten

1. Merkmale komplexer Systeme bzw. zellulärer Automaten

2. Grundcharakteristika - „Game of Life“

3. Definition

4. Eigenschaften und Beschreibung 1-dimensionaler CAs

   Klassifikation nach Wolfram

5. Anwendung

Merkmale komplexer Systeme:

- Zahlreiche ähnliche Komponenten
- Gegenseitige Interaktion

→ „Selbstorganisation“

Entstehung von Strukturen und Mustern

Was sind zelluläre Automaten?

- Bestehen aus vielen Komponenten
- Eigener Zustand hängt von lokaler Umgebung ab
- Wechselwirkung untereinander wie bei Zellen
- alle „Zellen“ sind „Teilautomaten“, die nach den gleichen Regeln funktionieren

- „Maschine“
- Daten werden aufgrund festgelegter innerer Anweisung ausgewertet

➔ Bestimmtes Verhalten

„Game of Life“ - John Conway

Spielregeln:

- Geburt einer Zelle: 3 lebende Nachbarn
- Überleben einer Zelle: 2 oder 3 lebende Nachbarn
- Tod einer Zelle: < 2 oder > 3 lebende Nachbarn

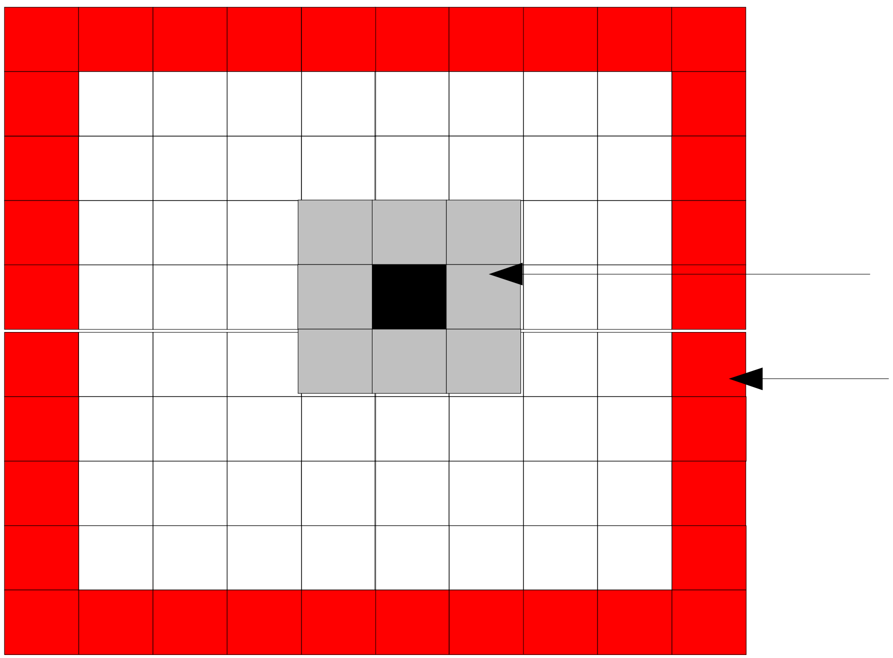
Entstehung komplexer Muster:

- ➔ Zeitlich stabile Formationen
- ➔ Sich bewegende Objekte
- ➔ Interaktion dieser Objekte
- ➔ Ausgang unvorhersehbar

Grundcharakteristika
zellulärer Automaten

- Entwicklung in **Raum und Zeit**
- **Raum** eines Automaten ist **diskrete** Menge von Zellen
- Jede Zelle verfügt nur über eine **endliche** Anzahl möglicher Zustände
- Zustände aller Zellen verändern sich in **diskreten Zeitschritten**
- Alle **Zellen** sind **identisch** und folgen den gleichen Entwicklungsregeln
- Die **Entwicklung** einer Zelle hängt nur von **eigenem Zustand** und von dem ihrer **lokalen Umgebung** ab

Definition zellulärer Automaten



- Zellraum
- Nachbarschaft
- Randbedingungen
- Zustandsmenge
- Zustandsentwicklung

Zellraum

\- Menge gleichartiger Zellen → diskrete Struktur -

- Dimension

- Geometrie der Zellen und daraus resultierende Gitterstruktur

rechteckig hexagonal dreieckig

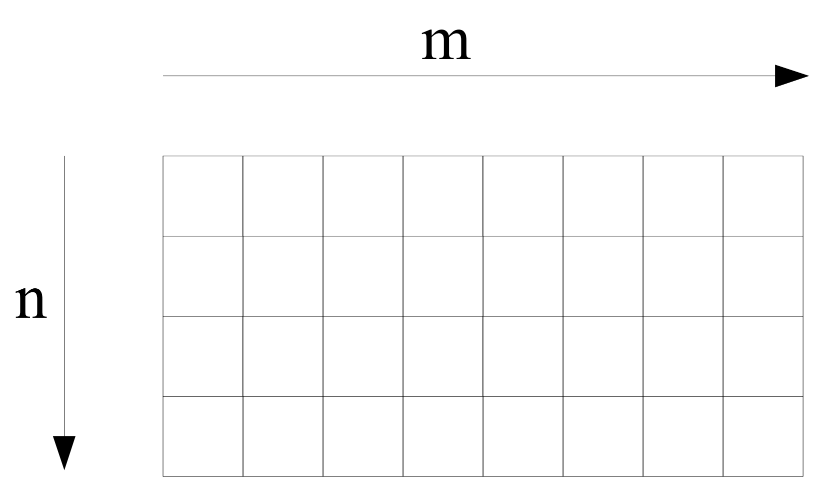
(Bild beispielsweise in: Gerhardt und Schuster 1995, S. 20)

Zellraum

- Größe des Zellraumes

Im 2-dimensionalen z.B. Life:

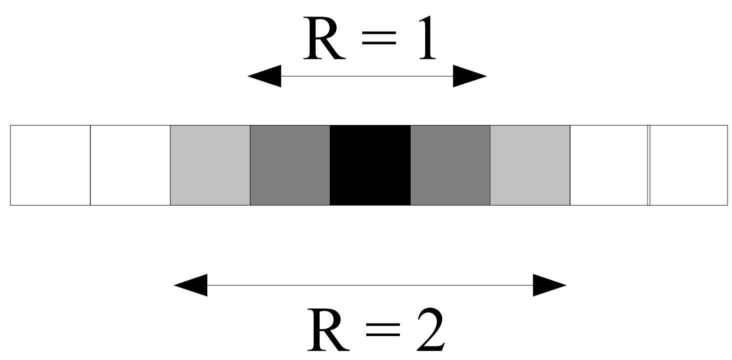
(n x m)-Gitter



$$R = \{ i, j \mid i, j \in N, 0 \leqslant i < n, 0 \leqslant j < m \}$$

Nachbarschaft

1-dimensional:



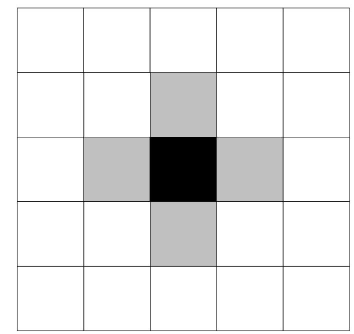
Gesamtzahl benachbarter Zellen: $2r + 1$

2-dimensional:

- Margolus-Nachbarschaft:
  z.B.: Simulation von Gasen

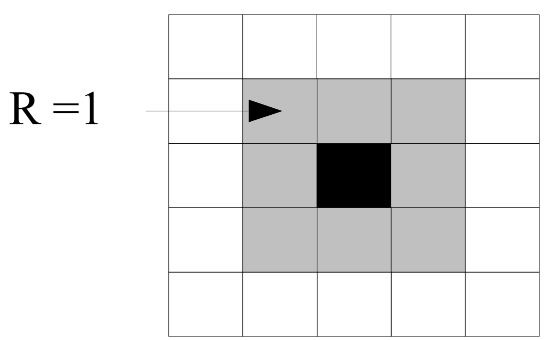
Nachbarschaft

- von-Neumann-Nachbarschaft

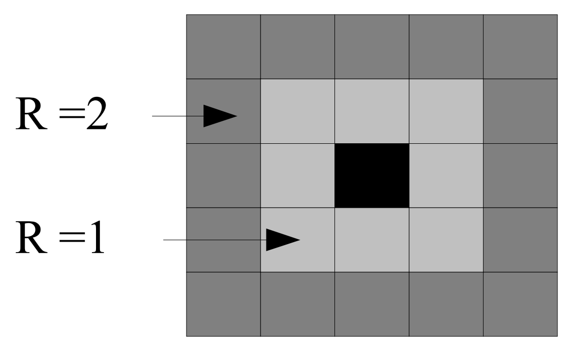


- Moore-Nachbarschaft

„normal“

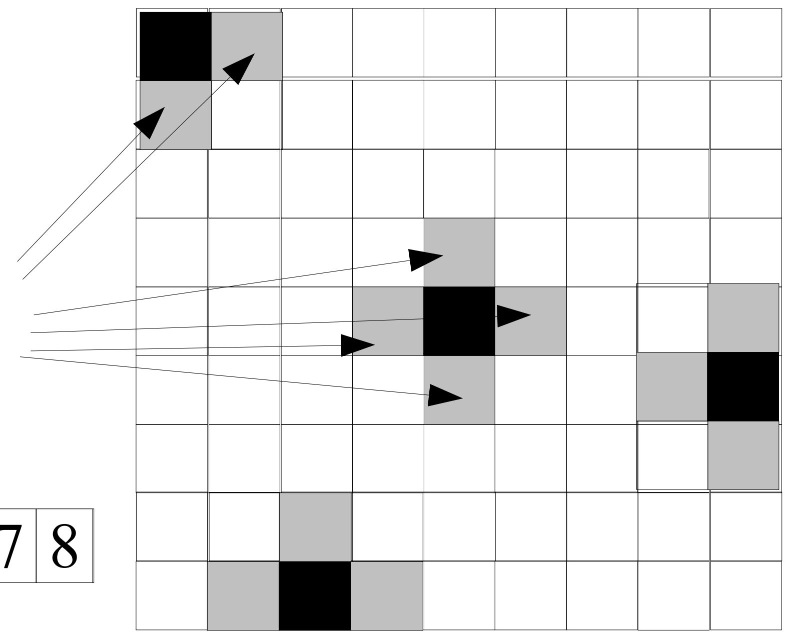


„erweitert“



Bsp. LIFE: $N_{i,j}=\{(k,l)\in R \mid |k-i|\leqslant 1 \; und \; |l-j|\leqslant 1\}$

Randbedingungen



Randzellen haben
weniger Nachbarn
als innen liegende

„offen“ | 1 | 2 . . . . 7 | 8 |

„vekleben“ : periodisch | 7 | 8 | 1 | 2 . . . . . . 7 | 8 | 1 | 2 |

„spiegeln“ : symmetrisch | 2 | 1 | 1 | 2 . . . . . . 7 | 8 | 8 | 7 |

(Bild: http://www.soc.surrey.ac.uk/JASSS/1/3/1.html)

Zustandsmenge

- Gesamtheit aller erreichbarer Zustände -

Beispiel: „Game of Life“

- Zwei Zustände: „tot“, „lebendig“ bzw 0 , 1
  - → „binärer Automat“
- 2^N Möglichkeiten die beiden Zustände auf N Felder zu verteilen
- Zustandsmenge $Q=\{0,1\}$

- Zustandsmenge ist endliche Menge
- Verwendete Anzahl von Zuständen vom zu beschreibenden Problem abhängig
- Für eine Zelle mit k möglichen Zuständen auf N Gitterplätzen gibt es k^N mögliche Zustände des gesamten zellularen Automaten

Zustandsentwicklung

- Spielregel zur Änderung des Automatenzustandes -

- Hängt nur von Zuständen der Zellen in der definierten Umgebung ab
- Aktualisierung erfolgt in diskreten Zeitintervallen, meist für alle Zellen gleichzeitig und nach den selben Regeln
- Anzahl möglicher Spielregeln eines Automaten mit k Zuständen und n Zellen in der Nachbarschaft:

$$k^{k^n}$$

- Unerreichbare Zustände:

  „Garten-Eden“- bzw. „Paradies“-Zustände

Zustandsentwicklung

Möglichkeiten zur Formulierung der Automatenspielregeln:

deterministisch $\longleftrightarrow$ stochastisch

Jeder möglichen Gruppe von Zustandwerten wird der Wert für die folgende Runde genau vorgeschrieben

Es werden Wahrscheinlichkeiten für die Werte der folgenden Runde vergeben

Beispiel für eindimensionale Automaten mit Radius 1:

$$q_i(t+1) \begin{cases} 1 & , wenn\left(q_{i-1}(t)+q_i(t)+q_{i+1}(t)\right)=2 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

„totalistische Regel“: Anordnung bedeutungslos

Klassifizierung in 4 Typen

Systematische Untersuchung von eindimensionalen, binären, totalistischen CAs mit deterministischen Regeln durch Stephen Wolfram Anfang der 90er Jahre:

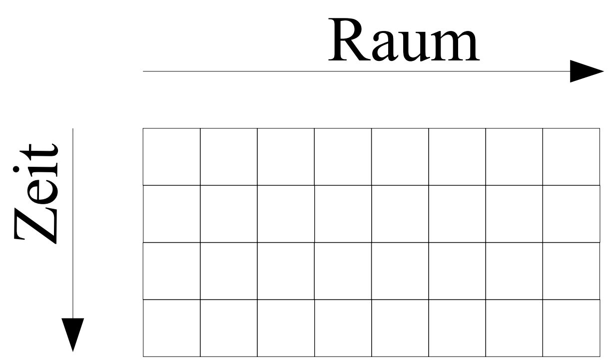
Zelluläre Automaten der

- **Klasse 1** entwickeln sich von fast allen möglichen Anfangszuständen aus zu einem unveränderlichem Endzustand;
- **Klasse2** bilden im Laufe ihrer Entwicklung Muster, die sich periodisch wiederholen können;
- **Klasse 3** zeigen ein chaotisches Verhalten; ihre Muster ändern sich ständig und erreichen auch lokal keine stabilen Formen
- **Klasse 4** entwickeln stabile oder periodische, räumlich voneinander getrennte Strukturen;
  je nach Anfangskonfiguration bewegen sich diese unvorhersagbar durch den Raum

Eindimensionale CAs

- Musterbildung:

geometrische Dimension + Zeit
Muster immer in Raum UND Zeit



- Modulo-2-Automat

$$q_i(t+1) = (q_{i-1}(t) + q_{i+1}(t)) \, mod \, 2$$

0	0	0	1	0	0	0

t=1

$\longrightarrow$

0	0	1	0	1	0	0

t=2

$\longrightarrow$

0	1	0	1	0	1	0

t=3

Raum

Zeit

0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0

Modulo-2-Automat

Bild:

http://www.wolframscience.com/nksonline/page-25

Codenummerierung der Spielregeln

Für eindimensionale, binäre totalistische Automaten:
Beschreibung der Dynamik durch Abbildung f:

$$f:\{0,1,\ldots,2r+1\}\rightarrow\{0,1\}$$

Lässt sich ausdrücken durch Tupel mit 2r+2 Elementen; daraus kann man Codenummer

$$C_f=\sum_{j=0}^{2r+1} f(j)\cdot 2^j$$ generieren.

Codenummerierung: mod-2-Regel

Für r = 2

Summe j	0	1	2	3	4	5
f(Summe)	0	1	0	1	0	1

C_f: $0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 = 42$

Bei k Zustandswerten:

$$C_f = \sum_{j=0}^{2r+1} f(j)\cdot k^j$$

Klasse 1 - Automaten

Code 4 (00000100); k=2, r=2
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/4/text.html

Code 60 (00111100); k=2, r=2
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/4/text.html

- Entwickeln sich nach wenigen Zeitschritten zu homogenem Endzustand (nur 0en oder 1en)
- Ihre Entwicklung zerstört jeglich Information über den Anfangszustand

Klasse 2 - Automaten

Code 24 (00011000); k=2, r=2
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/4/text.html

- Information geht während der Entwicklung nicht völlig verloren
- Informationen aus gewissen Zellsequenzen werden erhalten und in einfache Muster umgewandelt
- Verschiedene Anfangszustände führen nicht zu identischen Endzuständen, die Charakteristika der Endzu-stände sind aber die selben

Klasse 3 - Automaten

Code 10 (00001010); k=2, r=2; „irregular“
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/4/text.html

- Strukturen breiten sich über ganzen Zellraum aus
- Entwicklung scheint kein Ende zu nehmen
- „chaotisch“
- ungeordnet

Klasse 3 - Automaten

Code 12 (00001100); k=2, r=2; „regular“
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/4/text.html

- Regelmäßig
- Typischerweise Ausbildung von Dreiecksmustern

Klasse 4 - Automaten

Code20 (00010100);
ausgehend von verschiedenen ungeordenten Anfangszuständen
http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/9/text.html

- Haben kein charakteristisches Muster
- Verschiedene Anfangszustände führen zu unterschiedlichen Entwicklungen
- Muster sind meist nur auf kleinen räumlichen Bereich beschränkt
- Manche Anfangszustände führen zu unveränderlichen Strukturen die sich über das Feld bewegen

Anwendung

- Simulation von Gasen (Gittergas)
- chem. Evolution (Hyperzyklus)
- Musterbildung bei Lebewesen (Aktivator-Inhibitor Modell)
- Räuber-Beute-Modell (Volterra-Lotka)
- Verkehrssimulation

Quellen:

- Gerhardt, Martin und Heike Schuster 1995: Das digitale Universum. Zelluläre Automaten als Modelle der Natur. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden
- Gerhard Goos : Vorlesungen über Informatik: Band4: Paralleles Rechnen und nicht-analytische Lösungsverfahren, Springer-Verlag, 1998
- Jörg R. Weimar: Simulation with Cellular Automata; Logos-Verlag, Berlin
- Christoph Adami: Introduction to Artificial Life, Springer-Verlag
- W.Kinnebrock: Künstliches Leben: Anspruch und Wirklichkeit,Oldenbourg Verlag GmbH, München 1996
- Die Web-Seiten von Stephen Wolfram:

  http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/83-cellular/index.html