Theoretische Grundlagen Dynamischer Systeme

1. Grundlagen
2. Attraktoren
3. Ergodische Maße
4. Liapunov-Exponenten
5. Dimension und Entropie

1.Grundlagen

- Prinzipiell besteht ein dynamisches System aus einer Menge und einer Abbildung, die vom Kreuzprodukt dieser Menge mit einer weiteren, geordneten Menge wieder auf die Menge selber abbildet.

1.Grundlagen

- Prinzipiell besteht ein dynamisches System aus einer Menge und einer Abbildung, die vom Kreuzprodukt dieser Menge mit einer weiteren, geordneten Menge wieder auf die Menge selber abbildet.
- Praktisch ist diese Menge der Phasenraum eines Systems, die zweite geordnete Menge ist die Zeit.

- Der Phasenraum eines Systems ist der Raum, der von den Zustandsgrößen des Systems aufgespannt wird, d.h. von einem Satz (zeitabhängiger) Größen, die den Zustand des Systems eindeutig beschreiben.

- Der Phasenraum eines Systems ist der Raum, der von den Zustandsgrößen des Systems aufgespannt wird, d.h. von einem Satz (zeitabhängiger) Größen, die den Zustand des Systems eindeutig beschreiben.
- Beispiele:
- Mechanik – Geschwindigkeit und Ort aller Teilchen
- Thermodynamik – Druck, Volumen...
- Ökosystem - Populationen

- Ein Satz von Zustandsgrößen bildet also einen Punkt im Phasenraum. Zusammen mit der Zeitabbildung ergibt sich so im diskreten Fall eine Reihe von Punkten, im Fall einer kontinuierlichen Abbildung eine Bahn, Orbit genannt.

- Ein Satz von Zustandsgrößen bildet also einen Punkt im Phasenraum. Zusammen mit der Zeitabbildung ergibt sich so im diskreten Fall eine Reihe von Punkten, im Fall einer kontinuierlichen Abbildung eine Bahn, Orbit genannt.
- Solche Orbits schneiden sich nie (würde die Eindeutigkeit der Ableitung verletzen). Allerdings können sie in bestimmten Fällen in einander überlaufen (z.b. in einen Kreis)

2.Attraktoren

- Attraktoren sind zeitlich invariante Mengen im Phasenraum eines Systems

2.Attraktoren

- Attraktoren sind zeitlich invariante Mengen im Phasenraum eines Systems
- jeder Attraktor hat ein bestimmtes zugehöriges Einzugsgebiet. Alle Punkte in diesem Einzugsgebiet nähern sich mit hinreichend großer Zeitentwicklung beliebig nah an jeden Punkt des Attraktors an.

- Beispiele:
- Der Phasenraum eines eindimensionalen Oszillators hat zwei Dimensionen (Auslenkung und Geschwindigkeit)
- Die Orbits des harmonischen Oszillators bilden Kreise im Phasenraum, abhängig von den Anfangsbedingungen.
- Die des gedämpften Oszillators bilden Spiralen, die auf den Nullpunkt zulaufen. Dieser ist also Attraktor, Einzugsgebiet ist der gesamte Phasenraum.

- Für den angetriebenen Oszillator ergeben sich Spiralen, die auf einen festen Kreis zu laufen. Dieser Kreis, der abhängig von den Systemparametern ist, bildet den Attraktor des Systems.

3.Ergodische Maße

- Grob gesagt ist ein Maß eine Funktion, die jeder Teilmenge der Menge auf der sie definiert ist einen festen skalaren Wert zuordnet.

3.Ergodische Maße

- Grob gesagt ist ein Maß eine Funktion, die jeder Teilmenge der Menge auf der sie definiert ist einen festen skalaren Wert zuordnet.
- Im weiteren geht es um Wahrscheinlichkeitsmaße. Für diese muss das Maß der gesamten Definitionsmenge 1 ergeben.

- Ergodisch ist ein Maß, wenn dass mit diesem Maß gewichtete Scharmittel einer Funktion gleich dem zeitlichen Mittel entlang eines beliebigen Orbits ist.

$$\rho(\phi) = \int \rho(dx)\,\phi(x) = \lim_{T \Rightarrow \infty} ¿ \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x(t))$$

- Wenn eine Menge invariant unter der Zeitentwicklung des Systems ist, so existiert ein invariantes ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß dessen Träger dieser Menge entspricht.

4. Liapunov-Exponenten

- Wenn Rho ein ergodisches Maß ist, dann existiert für fast alle x auf dessen Träger der Grenzwert:
- $$\lim_{n \Rightarrow \infty} \left(T_x^{n*} \cdot T_x^n \right)^{1/2\mathrm{n}} = \Lambda_x$$
-
- Dabei ist $T_x^n = T(f^{(n-1)}x)\,T(f^{(n-2)}x) \ldots T(x)$ die Ableitungsmatrix von f^n (x).

4. Liapunov-Exponenten

- Wenn Rho ein ergodisches Maß ist, dann existiert für fast alle x auf dessen Träger der Grenzwert:
- $$\lim_{n \Rightarrow \infty} \left(T_x^{n*} \cdot T_x^n\right)^{1/2\mathrm{n}} = \Lambda_x$$
-
- Dabei ist $T_x^n = T(f^{(n-1)}x)\,T(f^{(n-2)}x)\ldots T(x)$ die Ableitungsmatrix von f^n (x).
- Die Logarithmen der Eigenwerte dieser Matrix sind die Liapunov Exponenten des Maßes.

- Die Liapunov Exponenten sind für alle x auf dem Träger von Rho konstant, da Rho ergodisch ist.

- Die Liapunov Exponenten sind für alle x auf dem Träger von Rho konstant, da Rho ergodisch ist.
- Sie geben anschaulich das Auseinanderlaufen zweier benachbarter Orbits wieder. $\delta x(t)=\delta x(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$
  Welches Lambda an dieser Stelle genutzt wird hängt von der Richtung des Verschiebungsvektors ab.

- Die Liapunov Exponenten berechnen sich nach

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \log \left| T_x^n u \right| = \lambda_{(i)}$$

u ist hier ein beliebiger Vektor aus dem Raum E(i)/E(i+1). E(i) ist der Raum, der von den Eigenvektoren zu allen Eigenwerten kleiner gleich Lambda i aufgespannt wird.

5.Dimension und Entropie

- Ist Rho ein ergodisches Maß und A eine Partition des Trägers von Rho, dann ist

  $$h(\rho) = \lim_{diam A \to 0} \lim_{n \to \infty} H(A^{(n)})$$

  die Entropie von Rho.
- Dabei ist $A^{(n)} = A \vee f^{-1} A \vee \ldots \vee f^{-n+1} A$ die Menge der Punkte, die in der Zeit n A durchlaufen und $H(A) = -\sum \rho(A_i) \log \rho(A_i)$ der Informationsgehalt der Partition A.
- Es gilt $h(\rho) \leq \sum \textit{positive}\, \lambda_i$

- Hausdorff Dimension:
  Die Hausdorff Dimension einer Menge ist

  $$D = -\lim_{R \to 0} \frac{\log(N)}{\log(R)}$$

  wobei N die minimale Anzahl der Kugeln mit Radius R ist, die man benötigt um die Menge zu überdecken.

- Hausdorff Dimension:
  Die Hausdorff Dimension einer Menge ist

  $$D = -\lim_{R \to 0} \frac{\log(N)}{\log(R)}$$

  wobei N die minimale Anzahl der Kugeln mit Radius R ist, die man benötigt um die Menge zu überdecken.
- Informationsdimension: Die kleinste Hausdorffdimension einer Menge mit Maß 1